Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Probabilités

Exercice 3 type devoir

Exercice :

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0{,}1$.

1°) Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2°) Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

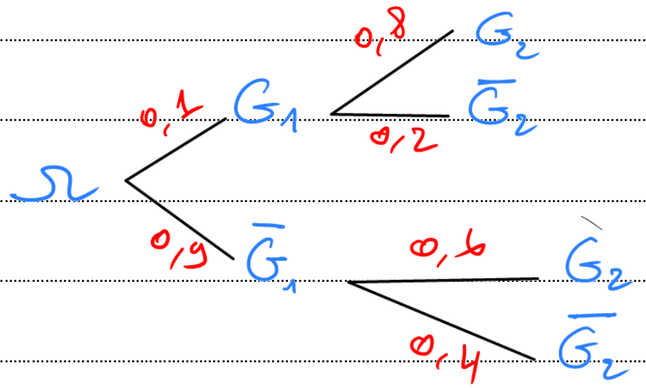
3°) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

4°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.

5°) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

6°) Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

1°)



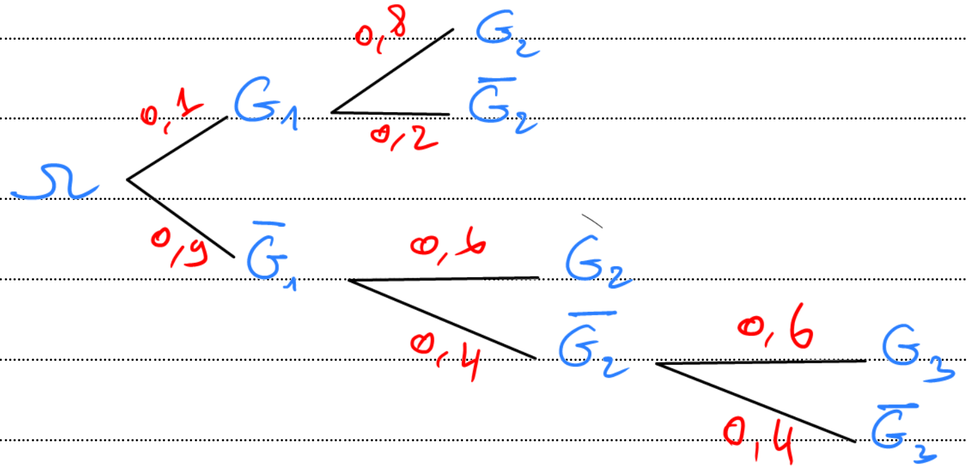
$$p_2 = p(G_2) = p(G_2 \cap G_1) + p(G_2 \cap \bar{G}_1)$$

$$= 0{,}8 \times 0{,}1 + 0{,}6 \times 0{,}9 = 0{,}62$$

2) $$p(\bar{G}_1 / G_2) = \frac{p(\bar{G}_1 \cap G_2)}{p(G_2)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}9}{0{,}62} = \frac{27}{31}$$

3) Soit l'évènement F : « le joueur gagne au moins une partie sur les trois première partie. »

Donc $\overline{F} = \overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}$



Ainsi $p(\overline{F}) = 0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$.

$p(F) = 1 - p(\overline{F}) = 1 - 0,144 = 0,856$

D'où $\boxed{p(F) = 0,856}$

4) $p_{n+1} = p(G_{n+1})$

$= p(G_{n+1} \cap G_n) + p(G_{n+1} \cap \overline{G_n})$

$= p(G_{n+1}/G_n) \cdot p(G_n) + p(G_{n+1}/\overline{G_n}) \cdot p(\overline{G_n})$

$= 0,8 \times p_n + 0,6 \times (1 - p_n)$

$= 0,8 \times p_n + 0,6 - 0,6 \times p_n$

$= 0,2\, p_n + 0,6$

$= \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$

D'où $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$

5°) pour $n = 1$; $\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = 0,1 = p_1$

(Récurrence)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

et montrons que $p_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.

$p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{3}{5}$

$= \frac{3}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{3}{5}$

$$= \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

6°) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{3}{4}$ ($\left(\frac{1}{5}\right)^n \to 0$)

car $-1 < \frac{1}{5} < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{4}$